Prova Oficial 2011
Resolução

Questão 1: Língua Estrangeira - Rendez-vous chez Khan (7 pontos)

Um dos protagonistas, Marco, coloca os patins e parte, afastando-se do seu amigo Polo. Para não perder tempo, Marco tira os patins depois de percorrer uma determinada distância e os deixa para seu amigo, prosseguindo a pé. Ao encontrar os patins, Polo os coloca e segue para alcançar seu amigo. Como essa estratégia, outras soluções são equivalentes. Entretanto, para se minimizar o tempo gasto, Marco deverá retirar os patins na metade do caminho, percorrendo cada um 10km a pé e 10km com os patins. Dessa maneira, Marco e Polo chegarão ao mesmo tempo na casa de Khan em aproximadamente 2h30min.

Questão 2: Todas as criaturas grandes e pequenas (5 pontos)

O mínimo é : 1×2+1×4+5+7= **18**; e o máximo é : (1+1)×2×4×5×7= **560**.

Questão 3 : Dor de cabeça (7 pontos)

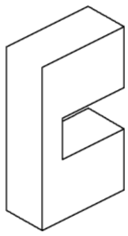
Várias estratégias são possíveis. Por exemplo, pode-se tomar o paralelepípedo « horizontal » e calcular seu volume : (2 × 8 × 10 = 180 cm^3), acrescentando-se as duas partes verticais de 10 cm de altura que « sobram » :

2 x 2 × 4 × 8 = 2 x 64 = 128 cm^3.

Acrescenta-se então as duas partes restantes verticais de 8 cm de altura, descontando-se as partes já computadas. Portanto :

2 x (2 × 4 × 8 - 2 x 3 x 2) = 2 x (64 – 12) = 2 x 52 = 104 cm^3.

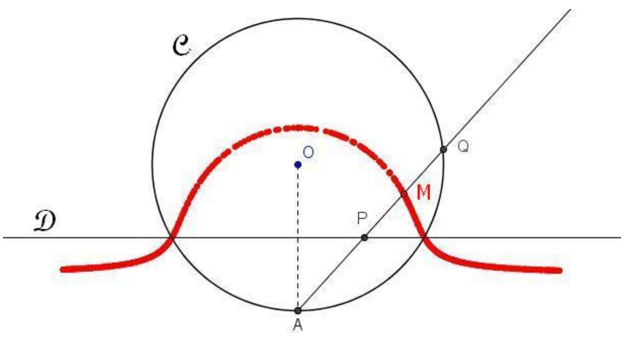
Obtemos assim um volume total de 160 + 128 + 104 = **392 cm^3**.



Questão 4 : Um feliz acontecimento (5 pontos)

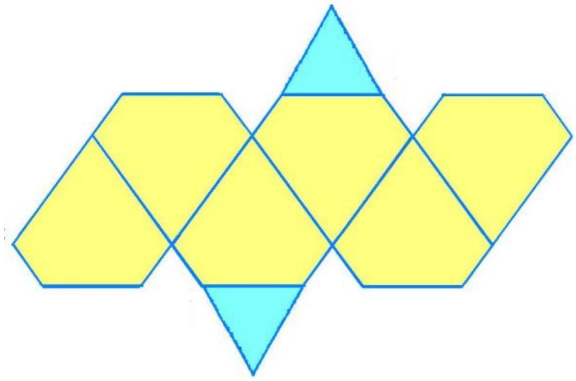
A resposta é a curva vermelha na ilustração abaixo, que é a curva mediana da circunferência e da reta.

É importante notar o comportamento assimptótico da curva dos dois lados.



Questão 5 : Poliedro de Dürer (7 pontos)

Há inúmeros padrões possíveis. Segue abaixo um deles.



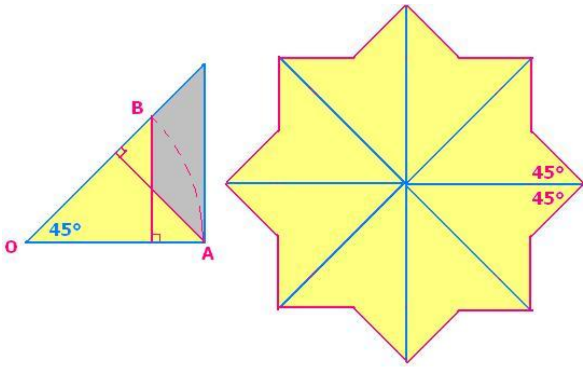
Questão 6 : Zelliges, uma forma de arte islâmica (5 pontos)

A figura abaixo mostra a folha de papel aberta ; em cinza, o trapézio a ser cortado.

Depois de três dobras, o ângulo medido é igual a $\frac{360°}{8} = 45°$.

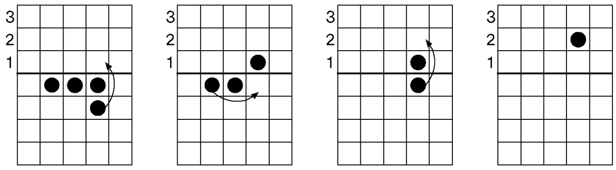
As hipotenusas OA e OB dos triângulos retângulos formam entre si um ângulo de 45 °, de modo que os outros ângulos agudos desses triângulos também medirão 45°.

Quando se desdobra o papel, cada ângulo é duplicado por simetria, de modo que o polígono terá oito ângulos de 90°.

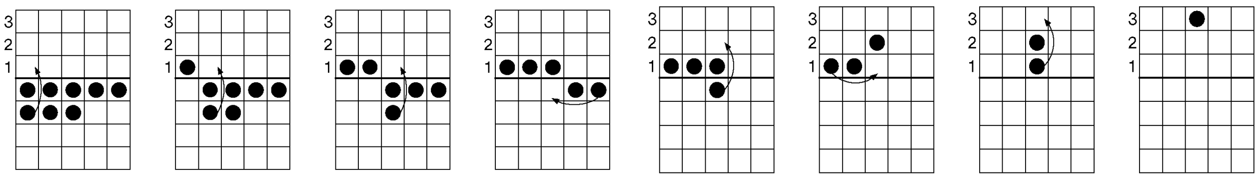


Questão 7 : Tentando da terceira linha (7 pontos)

Segue abaixo uma sequência de movimentos que permitem os peões atinjam a 2a. linha.

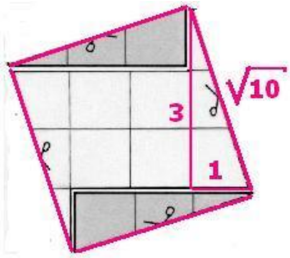


Segue abaixo uma sequência de movimentos que permitem que os peões atinjam a 3a. linha utilizando-se 8 peões.

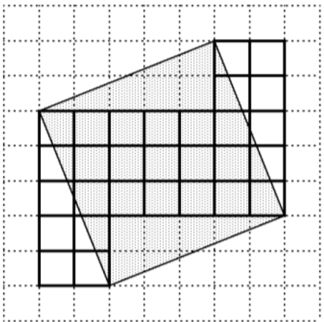


Questão 8 : Recorte e cole (5 pontos)

Formada por 10 quadrados unitários, a figura tem uma área total de 10 cm^2. Portanto um quadrado de área equivalente terá um lado com medida igual a $\sqrt{10}$ cm, como mostra a figura abaixo.



Considerando-se o novo corte feito e aplicando-se o teorema de Pitágoras a cada um dos triângulos cinzas, temos $3^2 + 1^2 = 10$. Assim, pensando analogamente na situação dos 29 quadrados, podemos imaginar um nove corte de modo que aplicando-se novamente o teorema de Pitágoras como anteriormente, teremos que $29 = 5^2 + 2^2$, determinando a maneira como deve ser o novo corte, como mostra a figura :



Questão 9 : E então ? E então ? (7 pontos)

Inicialmente é interessante calcular os primeiros termos e observar os valores obtidos :

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)
2010	5	$5^2 = 25$	$2^2+5^2 = 29$	$2^2+9^2 = 85$	$8^2+5^2 = 89$	$8^2+9^2 = 145$	$1^2+4^2+5^2 = 42$	$4^2+2^2 = 20$	$2^2+0^2 = 4$	$4^2 = 16$	$1^2+6^2 = 37$	$3^2+7^2 = 58$	$5^2+8^2 = 89$	…

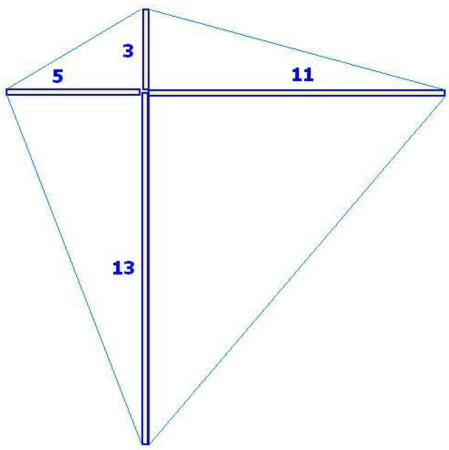
Constata-se que o 14º termo é o mesmo que o 6º. Como a regra continua a mesma, pode-se afirmar que os termos de ordem 22, 30 e 38 também terão o mesmo valor, isto é, 89. Conclui-se então que a partir do termo de ordem 6, isto é, o 6º termo, a série tem um período igual a 8. Assim, os termos de ordem 8, 2000 e 2008 terão o mesmo valor (42), pois são múltiplos do período (8).
Portanto, o **2011º termo valerá 16** pois o termo 2011 = termo 2008 + 3 (vide quadro acima).

Ensino Médio

<u>Questão 10 : Um espaguete, dois espaguetes, três espaguetes, quatro. (10 pontos)</u>
Para as 1a. e 2a. séries

Em todo triângulo, a altura em relação a um dos lados é sempre igual ou menor às medidas dos lados adjacentes. Assim, com dois espaguetes com um ponto em comum, a área será máxima quando o ângulo for reto. Para se obter a máxima área então, devemos arranjar os quatro espaguetes de maneira que formem triângulos retângulos.

A área máxima será obtida com o arranjo mostrado na figura abaixo.



A área máxima será igual à soma das áreas dos quatro triângulos totalizando **128** cm^2.

<u>Questão 11 : Bem embrulhado (5 pontos)</u>
Apenas para a 2a. série

Seja x a medida do lado da base quadrada do pacote e y sua altura. As duas medidas estão expressas em centímetros.

O problema se resume à solução do seguinte sistema de equações :

$$\begin{cases} 4x + 4y - 10 = 150 \\ 6x + 2y + 30 = 150 \end{cases}.$$

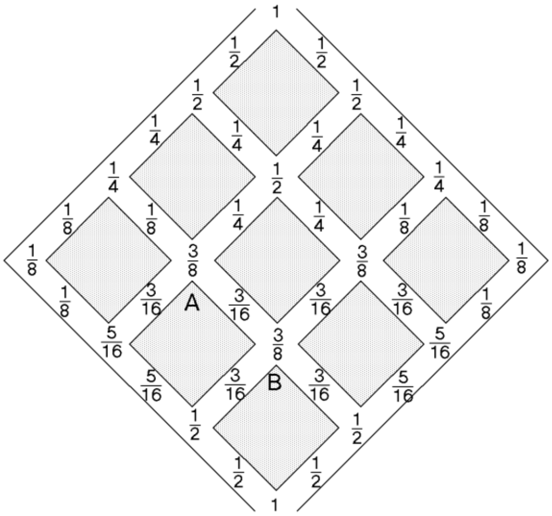
Resolvendo o sistema, temos que : $x = 10$ e $y = 30$.
Portanto o volume do pacote é igual a $\boldsymbol{V = 10 \times 10 \times 30 = 3.000\ \mathrm{cm}^3}$.

Questão 12 : Cadê as bolinhas de gude? (7 pontos)

Apenas para a 2a. série

Seguem abaixo as probabilidades para os diferentes caminhos possíveis. Observando-se a figura, pode-se concluir que a **probabilidade da bolinha passar pelo ponto A é $\frac{3}{8}$.**

E **a probabilidade de passar pelo ponto B também é igual a $\frac{3}{8}$.**



Questão 13 : Super Rápido (10 pontos)

Apenas para a 2a. série

Temos que 5 min = $\frac{1}{12}$ h e 6 min = $\frac{1}{10}$ h

No instante em que os dois trens se cruzam, o próximo trem que Alberto verá se encontra a uma distância *d* igual à soma da distância que o trem de Alberto percorrerá até o próximo encontro e a distância que o outro trém percorrerá nesse mesmo intervalo de tempo.

Essa distância *d* também é a distância entre os dois trens que se cruzam mesmo após a diminuição da velocidade do trem de Alberto.

Quando os trens se deslocam a uma velocidade de 300 km/h temos que :

$\boldsymbol{d} = 300\times\frac{1}{12} + 300\times\frac{1}{12} = 50$ km. (I)

Após a diminuição da velocidade do trem de Alberto que passa a ter uma velocidade $\boldsymbol{v}$, temos :

$\boldsymbol{d} = 300\times\frac{1}{10} + \boldsymbol{v}\times\frac{1}{10}$. (II)

Igualando-se (I) e (II) temos que **$\boldsymbol{v}$ = 200 km/h**.