Olimpíada Internacional Mathématiques sans frontières

Prova Nível Jr - Sr – 2015 - Gabarito

Questão 1 (7 pontos) Língua Estrangeira

Uma das maneiras de se chegar a essa expressão é a seguinte: considerando-se um polígono de n vértices e a definição de diagonal, de um vértice pode-se obter n-3 diagonais. Assim, se o polígono possui n vértices, pode-se traçar n(n-3) diagonais. Como as mesmas diagonais podem ser traçadas do vértice contrário, esse número precisa ser dividido por 2 para se ter o número de diagonais de um polígono de n vértices: $\frac{1}{2}$ n(n – 3) . Outros raciocínios são possíveis.

Portanto:

N vértices	D = n diagonais
6	9
7	14
8	20
15 16	90 104

Aplicando-se a fórmula a números maiores de vértices, constata-se que não existem polígonos com 100 diagonais.

Questão 2 (5 pontos) Decrescimento programado

Considerando as seguintes observações :

- os números devem ter dois dígitos
- se permutamos os dois dígitos do primeiro número, o número seguinte não muda
- números que possuem 0 ou 1 determinam sequências de dois elementos
- números que possuem 2 determinam sequências de três elementos.

A partir daí, concluímos que a partir de **77** se obtém a série 49 ; 36 ; 18 ; 8, sendo esta a série mais longa.

Questão 3 (7 pontos) Umas volta sobre eixos

Depois de uma volta, a roda avança 50π cm, enquanto a prancha avança 10π cm.

Em relação ao solo, temos que a prancha avança $(50\pi + 10\pi)$ = **60π cm**, isto é, aprox.. **188,5 cm**.

Questão 4 (5 pontos) Tétrathlon

As soluções são várias. Denominemos as equipes respectivamente A – B – C – D – E – F – G – H.
Exemplo da representação de uma possível solução:

Voleibol	Futebol	Handbol	Rugby
A - B	A - C	A - D	A - E
C - D	E - G	C - E	C - F
E - F	F - B	F - H	B - H
G - H	D - H	B - G	D - G

Uma outra possível solução é a seguinte:

	E	F	G	H
A	**Voleibol**	**Futebol**	**Handbol**	**Rugby**
B	**Rugby**	**Voleibol**	**Futebol**	**Handbol**
C	**Handbol**	**Rugby**	**Voleibol**	**Futebol**
D	**Futebol**	**Handbol**	**Rugby**	**Voleibol**

Questão 5 (7 pontos) Círculo

Uma das soluções é a seguinte:

BCD é um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio cm.
Cada lado dista 3cm do centro da circunferência. (fig.1)

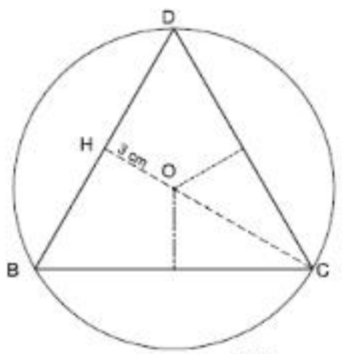


Fig. 1

Utilizando-se esta propriedade, o triângulo pedido se obtém traçando-se por A a corda EF tangente à circunferência de raio 3 cm (fig 2)

Completa-se o triângulo traçando-se a partir do ponto E e F as tangentes ao círculo de raio 3cm.

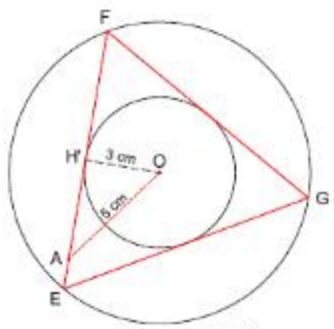


Fig. 2

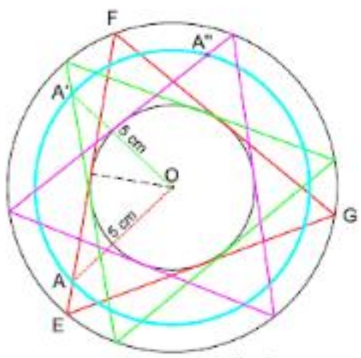
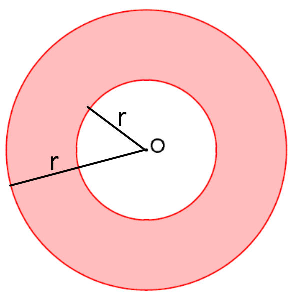


Fig. 3



A construção é possível para todos os pontos com distância $3 \le d \le 6$.

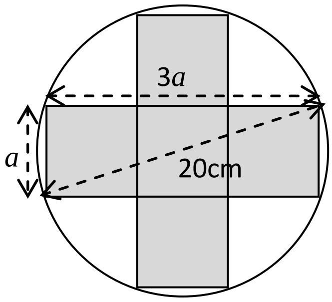
Questão 6 **(5 pontos)** **Clube dos cinco**

Esta questão pode ser resolvida graficamente assim como da maneira a seguir:

Considerando-se t_A o tempo gasto por Ahmed, o tempo de Elise será $t_E = t_A + 20$
Sabe-se que $v_A = 2v_E$ de onde se obtém que $v_A t_A = v_E t_E$ >> $2v_E t_A = v_E t_A + v_E 20$
Obtendo-se que $t_A = 20$ minutos

O tempo total é portanto **150 minutos, isto é, 2h30min.**.

Questão 7 **(7 pontos)** **Caixa esperta**



Aplicando-se o teorema de Pitágoras, se determina a = $\sqrt{40}$ cm.
Assim, temos que o volume da caixa será $a^3 \approx 253\ cm^3$

Questão 8 **(5 pontos)** **Bela escapada**

Quando o primeiro corredor atinge o topo da colina, o segundo está a 200m e gastará ainda:
200m / (18km/h) = 40s.

Portanto, na descida, o primeiro corredor tem uma vantagem de 40s. Dado que os dois corredores depois de passarem pelo topo da colina, gastam o mesmo tempo e percorrem a mesma distância a uma velocidade constante de 70km/h, a distância entre eles será de:

$$70 \times \frac{40}{3600}\ km \approx 0{,}778\ km\ = 778\,m$$

Questão 9 **(7 pontos)** **Geolocalização**

Sabendo-se que o raio da Terra mede 6 367 km ; pode-se determinar o ângulo correspondente ao arco de 0,1 km:

$0{,}1 = \frac{2\pi r}{360} \times \alpha$ de onde $\alpha \approx 0{,}0009°$.

Portanteo , o GPS indicará uma latitude Norte de 48,7281° – 0,0009° = **48,7272°**.

Questão 10 **(10 pontos)** **Teoria das cordas**

Polígono	L segmento com origem em A	L lado	Produto
quadrado	um segmento com l = 2	2 lados com l= $\sqrt{2}$	4
hexágono	um segmento com l = 2 2 segmentos com l = $\sqrt{3}$	2 lados com l = 1	6
Triângulo equilátero		2 lados com l = $\sqrt{3}$	3
Quiliágono			1.000

Questões para o Ensino Médio

Questão 11 (5 pontos) Bolhas sobre bolhas

O raio inicial da primeira esfera mede 6cm, e no final mede 7cm. Segundo o enunciado, tem-se a seguinte relação: $V_7 = V_R + V_6$ de onde se deduz que

$R^3 = 7^3 - 6^3$ $R^3 = 127\ cm^3$ R **≈ 5,03 cm**

O diâmetro da esfera da bolha interna deve medir aprox. 10 cm.

Questão 12 (7 pontos) Área de pouso

Todo hexágono é composto de 6 triângulos equiláteros iguais às faces triangulares.

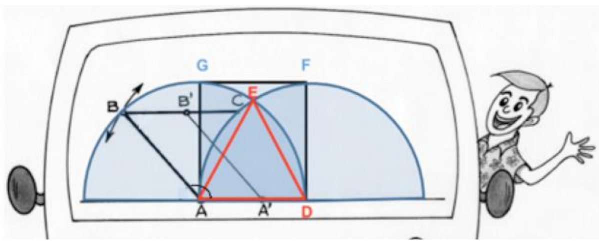
Supondo-se que a mosca não pousa nas arestas do sólido, **a probabilidade da mosca pousar sobre uma face hexagonal é:**

$$\frac{4\times 6}{4\times 6+4}=\frac{24}{28}$$

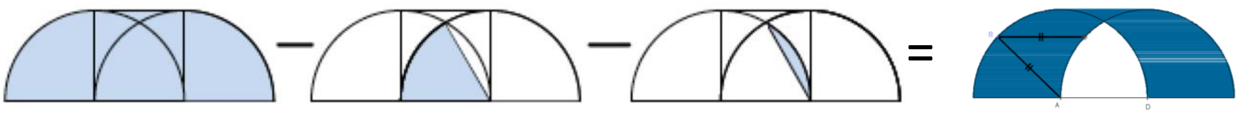
Probabilidade = $\mathbf{\frac{6}{7}}$**.**

Questão 13 (10 pontos) Limpinho

O quadrilátero ADFG é um quadrado de 0,7m de lado e o triângulo ADE é equilátero.



O desenho seguinte ilustra o cálculo da área da parte limpa:



(O desenho não está na escala solicitada)

$$0{,}5\ \times\pi\times 0{,}7^2+0{,}7^2-\frac{1}{6}\times\pi\times 0{,}7^2-\left(\frac{1}{6}\pi\times 0{,}7^2-\frac{0{,}7\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0{,}7}{2}\right)=\mathbf{0,7^2\left(\frac{\pi}{6}+1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\approx\mathbf{0,9587}$$

O fabricante, portanto, não deverá se interessar pela proposta porque a parte do parabrisa não limpa é uma grande parte no centro do parabrisa.