Rede POC
Rede do Programa de Olimpíadas do Conhecimento

Mathématiques Sans Frontières

# Gabarito da Prova Oficial - 2013 – Nível Jr e Sr

## Questão 1 – Língua Estrangeira - 7 pontos

Com relação à cor, há sete possibilidades de combinações dos chapéus :

| Possibilidade | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anatole | R | R | R | R | V | V | V |
| Michel | R | R | V | V | R | R | V |
| Thomas | R | V | R | V | R | V | R |

Onde R é vermelho e V é verde

Três situações podem ser eliminadas: 2, 4 e 6. Portanto, entre as 4 possibilidades restantes, Thomas deve estar usando um chapéu vermelho, pois não tem como ver as cores dos chapéus para responder SIM.

## Questão 2 – *Matemágica* - 5 pontos

A soma dos 3 números conforme as regras é sempre igual a 27.

Observa-se que a soma se repetirá novamente se somarmos um mesmo número a todos os elementos de uma mesma linha ou coluna.

Usando as propriedades acima, os alunos encontrarão quadrados em que a soma seja igual a 40.

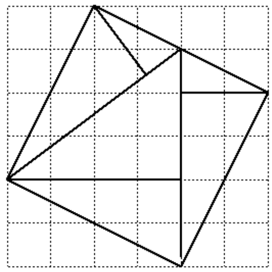
## Questão 3 – *Abastecendo o carro* - 7 pontos

Duas situações são possíveis :

- ✓ O 2o. retângulo acabou de passar para branco, o que significa que ele percorreu 252,6 km com 1/3 do combustível, restando 2/3 de combustível no tanque, podendo percorrer ainda 2 x 252, 6 = 505,2 km. Para chegar à reserva do tanque, ele poderá percorrer ¾ dessa distância, isto é, 378,9 km.
- ✓ No caso do 3o. retângulo passar para branco logo após a leitura feita, teremos que ele percorreu a distância indicada com ½ do tanque, podendo percorrer ainda outros 252,6 km. Para chegar à reserva, ele deverá percorrer 2/3 x 252,6 = 168,4 km.

Concluímos então que, conforme as condições dadas, ele poderá percorrer no mínimo **168,4 km** e no máximo **378,9 km.**

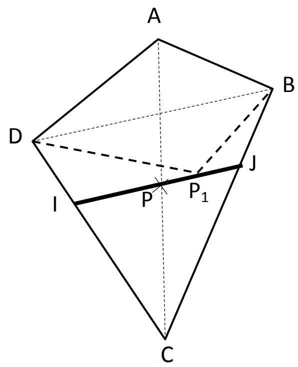
## Questão 4 - *Triangram* - 5 pontos



Este problema pode ser resolvido com simples manipulação.

## Questão 5 – *A divisão de Jacó* - 7 pontos

**P está sobre o ponto médio do segmento [AC].**




Utiliza-se a seguinte propriedade: dois triângulos que possuem a mesma base e a mesma altura têm a mesma área.

Conclui-se então que os triângulos APD e DPC possuem a mesma área, assim como os triângulos APB e CPB têm áreas iguais. Pode-se afirmar portanto que os quadriláteros ADPB e DPBC possuem a mesma área e assim a divisão proposta é igualitária.

**O conjunto de soluções sugerido por Paulo é o segmento [IJ] dentro do quadrilátero ABCD, passando por P e paralelo a [DB].**

Seja $P_1$ um ponto desse segmento. A área do triângulo $BDP_1$ é igual à do triângulo BDP (conf. a mesma propriedade). Pode-se afirmar que a área do quadrilátero $ABP_1D$ é igual à do quadrilátero ABPD, isto é, a metade da área de ABCD.

## Questão 6 – *Ganhando e perdendo* - 5 pontos

Pensemos no problema de maneira inversa, montando a tabela abaixo :

| | Jorge | César | Roberto | |
|---|---|---|---|---|
| Fim da 5ª. Rodada | 10 | 9 | 8 | |
| Fim da 4ª. Rodada | 5 | 18 | 4 | César perde |
| Fim da 3ª. Rodada | 16 | 9 | 2 | Jorge perde |
| Fim da 2ª. Rodada | 8 | 18 | 1 | César perde |
| Fim da 1ª. Rodada | 4 | 9 | 14 | Roberto perde |
| Início da 1ª. Rodada | **2** | **18** | **7** | César perde |

## Questão 7 – *Verdadeiro ou Falso* - 7 pontos

- ✓ Suponhamos que a afirmativa 1a seja verdadeira, e o número procurado tenha 2 dígitos. Ele deve ser ímpar (pois 1b é falso nesse caso). É também um quadrado (2a verdadeira, 2b falsa, pois o número tem dois dígitos). Os quadrados ímpares são 25, 49 e 81; resultando que não se verifica nem a condição 3a ou 3b, cuja contradição nos indica que a hipótese inicial está errada (1a é falsa!)

- ✓ Concluímos então que 1b é verdadeira e o número é par. Ele não pode ser o produto de dois números ímpares consecutivos, de onde concluímos que 4a é falsa. Sendo 4b verdadeira, o número é igual a um inteiro elevado ao quadrado somado com 1. Ele não pode ser igual a um quadrado, portanto 2a é falsa e 2b é verdadeira e o número possui então 3 dígitos.

  Os números que podem satisfazer a essa condição são:

$$\begin{array}{lll} 11^2+1=122 & 19^2+1=362 & 27^2+1=730 \\ 13^2+1=170 & 21^2+1=442 & 29^2+1=842 \\ 15^2+1=226 & 23^2+1=530 & 31^2+1=962 \\ 17^2+1=290 & 25^2+1=626 & \end{array}$$

Todos os números são pares e, portanto possuem mais de 2 divisores. Com isso 3b é falsa e 3a verdadeira, e descobrimos que o número contém um 7, isto é, 170 ou 730. Todavia nenhum deles é divisível por 11, de onde se conclui que 5a é falsa e 5b verdadeira: $730 = 9^3 + 1$.

**Eu sou o número 730 ! (**Há outras maneiras de se encontrar a solução)

## Questão 8 – *Jogando bilhar* - 5 pontos

Total de pontos para as 15 bolas = 120.

Se o total das 6 bolas de pontuação mais elevada é igual a 75, podemos concluir que Bonnie encaçapou pelo menos 7 bolas, totalizando 80 pontos para satisfazer a afirmação do enunciado (Bonnie obteve o dobro de pontos de Clyde). Assim, as diferentes maneiras possíveis são:

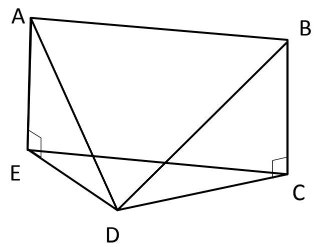
15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 5 = 80

15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 9 + 6 = 80

15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 8 + 7 = 80

15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 = 80

15 + 14 + 13 + 11 + 10 + 9 + 8 = 80




## Questão 9 – *Escalando o muro* - 7 pontos

Juliete chega ao ponto A, onde AE = BC = 5 m, altura do muro.

O triângulo ABD é retângulo isósceles em B.

Por Pitágoras, calcula-se que AD = $10\sqrt{2}$ e o declive é igual a $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}353$ ;

Equivalente a uma inclinação de aproximadamente **35 %.**

Se ao contrário, a inclinação é igual a 25 %, temos que $\frac{AE}{AD}$ = 0,25 ; AD = $\frac{5}{0{,}25}$ = 20.

$\cos \widehat{ADB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ , concluindo-se que o ângulo $\widehat{ADB}$ = 60°.

**Portanto, Juliete terá que seguir um ângulo de 60°.**

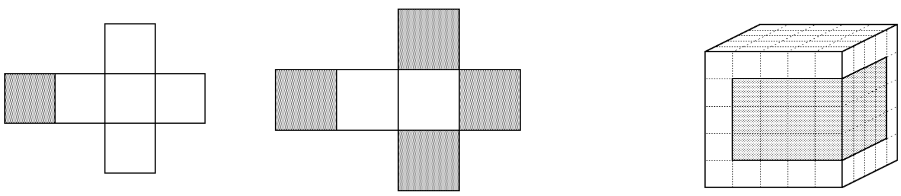
## Questão 10 – *Pintando o cubo* - 10 pontos

O grande cubo deve ser composto por 48 pequenos cubos.

- ✓ 1a. possibilidade: 4 pequenos cubos sobre cada aresta e 64 pequenos cubos no total. Por exemplo, pintar a face superior (16 cubos), restando 48 sem pintura.

- ✓ 2a. possibilidade: 5 pequenos cubos em cada aresta com um total de 125 pequenos cubos.

  Veja as ilustrações :



## Questão 11 – *Assembléia Internacional* - 5 pontos

Imaginemos um grupo de mulheres (M) e homens (H) ao redor de um círculo.

7 M têm uma M à direita : isso significa que há 7 pares MM sentados à mesa assim como também há 7 M que possuem uma mulher à esquerda (MM).

12 M têm um H à direita o que significa que há 12 pares MH e que igualmente 12 H possuem uma M à esquerda.

Concluímos que há 19 mulheres no total. Como 7 delas têm um H à sua direita, 12 têm um H à esquerda (HM) e portanto 12 H têm uma mulher à sua direita, que corresponde à ¾ do total de participantes. Calcula-se então que há 16 homens na assembleia.

Portanto, a probabilidade de uma mulher ser escolhida é igual a $\mathbf{\frac{19}{35}}$.

## Questão 12 – *Rampa escorregadia* - 10 pontos

Seja $d$ o diâmetro do eixo (1 cm), $D$ o das rodas (10 cm) e $\alpha$ o ângulo a ser calculado.

Considerando $\omega$ o ângulo de rotação das rodas:

A distância percorrida pelas rodas sobre o plano inclinado será igual a $s_1 = \pi \times D \times \frac{\omega}{360}$.

No mesmo intervalo de tempo, o cordão com o peso é enrolado de $s_2 = \pi \times d \times \frac{\omega}{360}$.

A perda de altura do conjunto é $h = s_1 \times \sin\alpha = \pi \times D \times \frac{\omega}{360} \times \sin\alpha$.

Para que o peso permaneça na mesma altura: $h = s_2$ >> $d = D \times \sin\alpha$ >> $\sin\alpha = \frac{d}{D} = \frac{1}{10}$.

Portanto $\alpha \approx 6°$.

**Há outras maneiras de se resolver esse problema.**

## Questão 13 *Participando do MSF!* - 10 pontos

Aplicando-se Pitágoras, e após as simplificações, determina-se que $x.y = 32$.

De onde pode se obter as possíveis soluções:

| $x$ | $y$ | Medidas dos lados do triângulo |
|---|---|---|
| 1 | 32 | 9 – 40 – 41 |
| 2 | 16 | 10 – 24 – 26 |
| 4 | 8 | 12 – 16 – 20 |